Geometria - canale Pet-Z

Anno accademico 2023/24

Prova scritta - 09 luglio 2024

Esercizio 1. Sia $V := M_{2,2}(\mathbb{C})$, $U := \{A \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \,|\, a = b, \quad c = 0\}$ e

$$W := \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

1. Verificare che U è un sottospazio di V;
2. determinare una base di U ed una di $U + W$;
3. determinare un complementare di W in V.

Risoluzione:

1. U è dato da equazioni omogenee di primo grado, quindi è un sottospazio
2. Una base di U è data da
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Una base di W è data da
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Usando l' eliminazione di Gauss si verifica che queste 4 matrici sono indipendenti, quindi formano una base di $U + W$.
3. Un complementare di W in V è dato da U.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ lineare tale che $f(1, 1, 0) = (i - 1, i + 1, 0)$, $f(0, -i, 0) = (0, 1, 0)$ e $f(0, 0, -1) = (-1, 0, -i - 2)$.

1. determinare $\mathrm{Ker} f$;
2. determinare $\mathrm{Im} f$;
3. Determinare l'espressione analitica di f.

Risoluzione:

1. I vettori $(i - 1, i + 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, -i - 2)$ sono indipendenti in $\mathbb{C}^3$, quindi $\mathrm{Ker}\ f = 0$;
2. Dalla formula di Grassmann segue che $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}^3$.

3. Sia e_1, e_2, e_3 la base standard di $\mathbb{C}^3$, abbiamo che

$$f(e_1 + e_2)) = (i-1)e_1 + (i+1)e_2,\ -if(e_2) = e_2,\ -f(e_3) = -e_1 - (i+2)e_3$$

Quindi $f(e_2) = ie_2$;
$f(e_1) + f(e_2) = f(e_1) + ie_2 = (i-1)e_1 + (i+1)e_2$,
oppure $f(e_1) = (i-1)e_1 + e_2$.
Infine $f(e_3) = e_1 + (i+2)e_3$. Pertanto la matrice associata a f rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} i-1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i+2 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'espressione analitica di f è data da

$$\begin{pmatrix} i-1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sia data la forma bilineare e simmetrica

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := \alpha x_1 y_1 + x_2 y_2 + 5x_3 y_3 - 2x_1 y_3 - 2x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

1. Determinare i valori di α per cui ϕ sia degenere;
2. per i valori di cui sopra, descrivere Kerϕ,
3. determinare, al variare di α, la segnatura della forma quadratica associata a ϕ

Risoluzione:

1. La matrice associata alla a bilineare e simmetrica ϕ rispetto alla base standard è data da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   ϕ è degenere quando $detA = 4(\alpha - 1) = 0$, quindi $\alpha = 1$

2. Per $\alpha = 1$, Kerϕ è generato dalle soluzioni del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

   Kerϕ ha dimensione 1 ed è generato da $(2, -1, 1)$.

3. La segnatura della forma quadratica associata a ϕ varia in modo continuo al variare di α e cambia solo quando cambia l' indice di nullità, quindi quando $\alpha = 1$. Un rapido conteggio usando la formula di Cartesio dà segnatura $(2, 1)$ per $\alpha < 1$, $(3, 0)$ per $\alpha > 1$. Quando $\alpha = 1$, si ha segnatura $(2, 0)$ e indice di nullità uguale a 1.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che $\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) \mid x = y - z = 0\}$ ed ha autospazio relativo all'autovalore 2 dato da $V(2) := \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$.

1. Calcolare la molteplicità algebrica degli autovalori,
2. dire se f è diagonalizzabile,
3. determinare l'espressione analitica di f;

Risoluzione:

Osserviamo che $\mathrm{Ker}\ f = \{(x, y, z) \mid x = y - z = 0\}$ ha dimensione 1 e una base è data dal vettore $v_1 = (0, 1, 1)$. Inoltre $\mathrm{Ker}\ f = V(0)$.

L'autospazio $V(2)$ ha dimensione 2 e una base è data dai vettori $v_2 = (1, -1, 0)$, $e\, v_3 = (0, 0, 1)$. Quindi si ha

1. La molteplicità geometrica dell' autovalore 0 è 1 e quella dell' autovalore 2 è 2. Poiché la dimensione dello spazio è 3 le molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche
2. f è diagonalizzabile,
3. Per l'espressione analitica di f vediamo che

$$f(v_1) = 0,\ f(v_2) = 2v_2,\ f(v_3) = 2v_3$$

implicano

$$f(e_2) = -f(e_3),\ f(e_1) = f(e_2) + 2e_1 - 2e_2,\ f(e_3) = 2e_3$$

Equivalentemente $f(e_2) = -2e_3$, $f(e_3) = 2e_3$, $f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3$.

La matrice associata a f rispetto alla base standard è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$